

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1956-018

Voordracht in de serie
"Actualiteiten"

Decompositie van ruimten

Th.J. Dekker



Voordracht in de serie

"Actualiteiten"

door

Th. J. Dekker

27 oktober 1956

Decompositie van ruimten

Twee verzamelingen P en Q gelegen in een metrische ruimte heten eindig-decompositie-gelijk. (notatie $P \bar{f} Q$ en $P \bar{n} Q$) als er n disjuncte delen P_i en evenzo Q_i ($i = 1(1)n$) bestaan zodat:

$$P = \bigcup_{i=1}^n P_i$$

$$Q = \bigcup_{i=1}^n Q_i$$

$$P_i \cong Q_i \quad (i = 1(1)n).$$

(Tenzij anders vermeld, zal $A \cong B$ aanduiden, dat A in B kan worden getransformeerd door een isometrie, die de orientatie invariant laat).

$$P \bar{f} Q \equiv \exists n (P \bar{n} Q).$$

De relatie $\bar{f}$ is reflexief, symmetrisch en transitief, de relatie $\bar{n}$ is niet transitief. Wel geldt:

$$P \bar{m} Q \ \& \ Q \bar{n} R \rightarrow P \bar{mn} R.$$

(cfr. Banach & Tarski [3]).

Zij B een begrensde verzameling gelegen op de rechte lijn R' .
Dan geldt:

$$R' \bar{f} R' \setminus B.$$

Zij D een hoogstens aftelbare verzameling gelegen in R' .
Dan geldt:

$$R' \bar{f} R' \setminus D$$

Zij P de verzameling der rationale getallen, A die der reële algebraïsche getallen. Dan geldt dus:

$$R' \bar{f} R' \setminus P \quad \text{en} \quad R' \bar{f} R' \setminus A.$$

Bovendien geldt:

$$R' \setminus P \bar{f} R' \setminus A.$$

Daarentegen geldt niet (als F_{10} de verzameling der eindige decimaalbreuken en F_2 die der eindige binaire breuken is):

$$P \bar{f} A$$

$$P \bar{f} F_{10},$$

$$F_{10} \bar{f} F_2.$$

(Sierpiński [14] Th 1 t/m 6)

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

Zij S^2 het boloppervlak gedefinieerd door $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en D een aftelbare (of eindige) deelverzameling van S^2 . Dan geldt ([14] Th. 8):
 $S^2 \cong S^2 \setminus D$

Bewijs: kies de z -as zo, dat geen punt van D er op ligt.
 Zij ρ_β een draaiing om de z -as over een hoek β . Dan is er een β zodat:

$D, \rho_\beta D, \rho_\beta^2 D, \dots$
 twee aan twee disjunct zijn.

Bewijs: Zij $p \notin D$ en $\alpha(p)$ de hoek tussen vlak opz en vlak oxz. Stel nu voor een zekere β

$q \in \rho_\beta^k D \cap \rho_\beta^{l'} D$ (k, l' geheel, $0 \leq k < l'$).
 Dan geldt:

$\alpha(q) = \alpha(p_1) + k\beta - 2k'\pi = \alpha(p_2) + l'\beta - 2l''\pi$.
 waarin $p_1, p_2 \notin D$; k', l'' geheel. Dus

$$\beta = \frac{\alpha(p_1) - \alpha(p_2) + 2(l'' - k')\pi}{l' - k}$$

Kiezen we β buiten de aftelbare verzameling

$$\frac{\alpha(p_1) - \alpha(p_2) + 2s\pi}{n}$$

waarin $p_1, p_2 \notin D$; s, n geheel, $n > 0$, dan zijn blijkbaar de verzamelingen $\rho_\beta^k D$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) twee aan twee disjunct.

Stel nu $T = \bigcup_{k=0}^{\infty} \rho_\beta^k D$ en $V = S^2 \setminus T$.
 Dan geldt:

$$\begin{aligned} \rho_\beta T &= T \setminus D, \text{ m.a.w. } T \cong T \setminus D, \text{ en verder } \\ S^2 &= T \cup V, \quad S^2 \setminus D = (T \setminus D) \cup V \\ T \cap V &= \emptyset \quad (T \setminus D) \cap V = \emptyset. \end{aligned}$$

Dus $S^2 \cong S^2 \setminus D$. q.e.d.

S^2 kan worden verdeeld in 4 disjuncte delen A, B, C, D , zodat D aftelbaar is en

$$A \cong B \cong C \cong B \cup C$$

(F. Hausdorff [7]).

Hieruit volgt, dat het onmogelijk is aan iedere deelverzameling A van S^2 een niet-negatief reëel getal $m(A)$ als maat toe te voegen met de eigenschappen:

- (a) $m(S^2) = 1$
- (b) $A \cong B \rightarrow m(A) = m(B)$
- (c) $A \cap B = \emptyset \rightarrow m(A \cup B) = m(A) + m(B)$

Bewijs: Omdat D aftelbaar is, geldt $S^2 \setminus D \cong S^2$.

Dus moet $m(A \cup B \cup C) = 1$ zijn. Wegens $A \cong B \cong C$ zou dan $m(A) = \frac{1}{3}$ moeten zijn en wegens $A \cong B \cup C$ zou $m(A) = \frac{1}{2}$ moeten zijn, wat blijkbaar onmogelijk is.

Hieruit volgt, dat evenmin iedere begrensde deelverzameling van de n -dimensionale Euclidische ruimte R^n ($n \geq 3$) een niet-negatieve reële maat kan hebben, die voldoet aan (b), (c) en (a'): $m(E^n) = 1$, waarin E^n een n -dimensionale eenheidskubus is.

Bewijs: stel er is een maat in R^n ($n \geq 3$), die voldoet. Dan is het duidelijk, dat er ook een is in R^3 .

Zij nu $A \subset S^2$ en $A' \subset R^3$ gedefinieerd door: $x \in A' \leftrightarrow x \in (o, p]$, waarin o de oorsprong is en p de verzameling A doorloopt. Definieren we nu $\mu(A) = m(A')$, dan is μ (op een constante factor na) een maat in S^2 , die aan (a), (b) en (c) voldoet, wat onmogelijk is.

Daarentegen kan aan iedere begrensde deelverzameling van R^1, R^2 en S^1 (= cirkel) een reële niet-negatieve maat worden toegekend, die voldoet aan (a) c.q. (a') en aan (b) en (c). (S. Banach [2]).

J. von Neumann stelde het volgende algemene probleem [10]:

Zij gegeven een verzameling M , een deelverzameling E en een permutatiegroep G van M (d.i. een groep van een-eenduidige afbeeldingen, die M afbeelden op M).

Een door E genormeerde, onder G invariante maat in M , kortweg een (M, E, G) -maat is per definitie een functie, die aan iedere deelverzameling A van M een maat $m(A)$ toevoegt met de eigenschappen:

- (a) $m(A)$ reëel ≥ 0 (inclusief ∞).
- (b) $\sigma \in G \rightarrow m(A) = m(\sigma A)$.
- (c) $A \cap B = \emptyset \rightarrow m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.
- (d) $m(E) = 1$.

Waaraan moeten nu M, E en G voldoen, opdat er een (M, E, G) -maat bestaat?

G kan worden opgevat als een permutatiegroep van G zelf door te definiëren: $\sigma(\tau) = \sigma\tau$ ($\sigma, \tau \in G$). Als nu een (G, G, G) -maat bestaat, heet de groep G meetbaar. O.a. geldt: iedere oplosbare groep en iedere eindige groep is meetbaar. Maar een groep, die een vrije ondergroep van rang 2 bevat, is niet meetbaar.

In geval $M = \mathbb{C}^n \cup \mathbb{R}^n$ resp. S^n , bewees von Neumann:

Er bestaat een (M,E,G) -maat, als G meetbaar is en E afbeeldt op verzamelingen van Lebesgue-maat 1.

Toepassingen: $M = \mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, S^1$, $G =$ bewegingsgroep

$$M = \mathbb{R}^n, \quad G = \text{translatiegroep}.$$

In geval $M = S^2, \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$), $G =$ bewegingsgroep, kunnen we de stelling niet toepassen, want G bevat een vrije ondergroep van rang 2 en is dus niet meetbaar. In deze gevallen bestaat, zoals we gezien hebben, geen (M,E,G) -maat.

J. von Neumann bewees nog, dat er geen (M,E,G) -maat bestaat, indien $M = \mathbb{R}^2$, $E = E^2$, $G =$ affiene groep, d.i. de groep van alle lineaire transformaties

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_1$$

$$y' = a_{21}x + a_{22}y + a_2$$

waarbij de determinant $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 1$ is.

A. Tarski komt o.a. tot het volgende resultaat [16]:

Een (M,E,G) -maat bestaat dan en slechts dan, als E niet "paradoxaal" verdeeld kan worden, d.w.z. als E niet kan worden verdeeld in twee disjuncte delen E_1 en E_2 , zodat

$$E \bar{\sim} E_1 \text{ en } E \bar{\sim} E_2.$$

($\bar{\sim}$ wordt hier gedefinieerd met een uitgebreider congruentiebegrip: $A \cong B =_{\text{def}} \exists \sigma \{ G(B = \sigma A) \}$).

Men kan van één bol twee bollen maken, d.w.z.: S^2 kan worden verdeeld in twee disjuncte delen S_1 en S_2 , zodat:

$$S^2 \bar{\sim} S_1 \text{ en } S^2 \bar{\sim} S_2.$$

(Banach & Tarski [3]).

Bewijs: Beschouw de verdeling van Hausdorff:

$$S^2 = A \cup B \cup C \cup D.$$

Wegens $A \cong B \cup C$ kunnen we A verdelen in twee disjuncte delen A_1 en A_2 , zodat $A_1 \cong B$, $A_2 \cong C$, waaruit volgt $A_1 \cong A_2 \cong A_1 \cup A_2$ Evenzo B en C . Dan hebben we:

$$S_1 = A_1 \cup B_1 \cup C_1 \cup D \bar{\sim} S^2$$

$$S_2 = A_2 \cup B_2 \cup C_2 \bar{\sim} S^2 \setminus D \bar{\sim} S^2$$

Dus $S_2 \bar{\sim} S^2$ en $S_1 \bar{\sim} S^2$.

Robinson bewees [11], dat S^2 kan worden verdeeld in 4 disjuncte delen A, B, C, D zodat:

$$A \cong B \cong A \cup B, \quad C \cong D \cong C \cup D.$$

Hieruit volgt: $S^2 \bar{\sim} A \cup C$ en $S^2 \bar{\sim} B \cup D$.

Hieruit volgt weer, dat een volle bol kan worden verdeeld in 5 stukken (waarvan een uit één punt bestaande), die na geschikte verplaatsingen 2 volle bollen opleveren.

Deze verdeling van S^2 is een bijzonder geval van een algemene decompositie-stelling, die - aangevuld door J.F. Adams [1] - aldus kan worden geformuleerd:

S^2 kan worden verdeeld in n ($n = 2, 3, \dots$) disjuncte delen A_i ($i = 1(1)n$) zodat alle sommen

$$\bigcup_{k=1}^s A_{i_k} \quad (1 \leq s < n)$$

(dus de lege som en de alle- A_i -omvattende som uitgezonderd) congruent zijn.

Voor deze congruenties zijn niet alleen rotaties, maar ook spiegelingen nodig. Indien alleen rotaties gebruikt worden, moet bovendien geeist worden, dat geen congruenties optreden tussen een som en zijn complement.

Robinson en Adams gaan uit van een vrije rotatie-groep waarvan de rang gelijk is aan het aantal voorgeschreven congruenties. Omdat er ook een vrije rotatie-groep van continue rang bestaat (cfr. J. de Groot [6]), geldt deze stelling ook voor een verdeling in oneindig veel (uiteraard hoogstens c , d.i. continu veel) delen, mits het aantal sommen, dat we congruent willen maken de machtigheid c niet overschrijdt.

(J. Mycielski [9], Dekker & de Groot [5]).

In het bijzonder kan S^2 worden verdeeld in aftelbaar veel disjuncte delen A_i ($i = 1, 2, \dots$), zodat alle sommen A_i - de lege som en de alle- A_i -omvattende som uitgezonderd - congruent zijn.

Bovendien kan er voor worden gezorgd, dat de delen totaal imperfect, samenhangend en microsamenhangend zijn, als het aantal voorgeschreven congruenties kleiner dan c is. [5]

Toepassingen: S^2 is de som van een stijgende welgeordende rij van machtigheid m van onderling congruente deelverzamelingen, indien $K_0 \leq m \leq c$.

Men kan van S^2 continu veel bollen maken.

Bewijs: beschouw de verdeling

$$S^2 = \bigcup_{t \in T} (B_t \cup C_t) \quad \bar{T} = c$$

die voldoet aan de congruenties

$$B_m \cong \bigcup_{t \in T} B_t, \quad C_m \cong \bigcup_{t \in T} C_t \quad (m \in T)$$

Dan geldt $S^2 \cong \bigcup_{m \in T} B_m \cup C_m \quad (m \in T)$ q.e.d.

(zie ook Sierpiński [12] Th.2).

Dit gaat enigszins gewijzigd ook met een volle bol.

Er is een verzameling $E \subset S^2$, zodat voor iedere n ($2 < n \leq c$) S^2 kan worden verdeeld in n disjuncte delen, ieder congruent met E door een rotatie.

Genoemde decompositie-stellingen gelden ook voor de n -dimensionale bol S^n ($n \geq 3$), behalve voor $n = 4$, waarvoor het probleem onopgelost is. Eveneens gelden deze stellingen in de n -dimensionale elliptische ruimte ($n \geq 2$, $n \neq 4$) en in de n -dimensionale hyperbolische ruimte ($n \geq 2$), mits we eisen, dat geen congruentie optreedt tussen een som van delen en zijn complement. [4].

In deze algemene vorm is het probleem onopgelost voor R^n ($n \geq 3$). In R^1 en R^2 gelden de stellingen natuurlijk niet.

Wel geldt in R^2 :

Er bestaat voor iedere $m \leq c$ een verzameling $V \subset R^2$, die kan worden verdeeld in m disjuncte delen, die congruent met V zijn (Sierpiński [13])

Het is duidelijk, dat V een maat nul moet hebben.

De stelling geldt niet, als bovendien geeist wordt, dat V begrensd is of gelegen is op een rechte.

Een verzameling $E \subset R^1$ bevat hoogstens één punt p zodat $E \setminus p \cong E$. (Sierpiński [15])

Dit probleem is onopgelost voor R^2 . Het geldt niet in R^3 .

Daar geldt zelfs:

Er is een niet-lege verzameling $E \subset R^3$, zodat

$E \setminus p \cong E$ voor alle $p \in E$.

Ja zelfs:

Er is een verzameling $E \subset S^2$ van continue machtingheid, zodat voor iedere hoogstens aftelbare deelverzameling D geldt $E \setminus D \cong E$

Voor iedere m ($1 \leq m \leq c$) is er een $E \subset S^2$ van machtingheid m zodat $E \setminus F \cong E$ voor iedere eindige deelverzameling F .

Literatuur

1. J.F. Adams: On decompositions of the sphere, J. London Math. Soc. 29 (1954) 96-99
2. S. Banach: Sur le problème de la mesure, Fund. Math. 4 (1923) 7 - 33
3. S. Banach & A. Tarski: Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes, Fund. Math. 6 (1924) 244-277
4. T.J. Dekker: Decompositions of sets and spaces, Proc. Kon. Ned. Ak. v. Wet. (Zal verschijnen)
5. T.J. Dekker & J. de Groot: Decompositions of a sphere, Fund. Math. (Zal verschijnen)

6. J. de Groot: Orthogonal isomorphic representations of free groups, Can. J. Math. 8 (1956) 256-262
7. F. Hausdorff: Bemerkungen über den Inhalt von Punktmengen, Math. Ann. 75 (1914) 428-433.
8. J. Mycielski: About sets with strange isometrical properties I, Fund. Math. 42 (1955) 1-10.
9. J. Mycielski: On the paradox of the sphere, Fund. Math. 42 (1955) 348-355.
10. J. von Neumann: Zur allgemeinen Theorie des Masses, Fund. Math. 13 (1929) 73-116
11. R.M. Robinson: On the decomposition of spheres, Fund. Math. 34 (1947) 246-260
12. W. Sierpiński: Sur le paradoxe de la sphère, Fund. Math. 33 (1945) 235-244.
13. W. Sierpiński: Sur un ensemble plan qui se décompose en $2^{\aleph_0}$ ensembles disjoints superposables avec lui, Fund. Math. 34 (1947) 9-13
14. W. Sierpiński: Sur l'équivalence des ensembles par décomposition en deux parties, Fund. Math. 35 (1948) 151-158
15. W. Sierpiński: Sur un ensemble plan singulier, Fund. Math. 37 (1951) 1-4.
16. A. Tarski: Algebraische Fassung des Massproblems, Fund. Math. 31 (1938) 47-66.